Vol. XVII, N$^{\underline{o}}$ 2, Diciembre (2009)
Notas: 123–126

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Producto de subgrupos $\mathbb{R}$-factorizables en un grupo abeliano

Julio Cesar Hernández Arzusa
Universidad de Cartagena

Recibido May. 18, 2009 Aceptado Sept. 4, 2009

Abstract
In this paper we present conditions under which the direct product of two abelian $\mathbb{R}$-factorizable groups is $\mathbb{R}$-factorizable. To find these conditions, we used some properties of the inner product of $\mathbb{R}$-factorizable subgroups.

Keywords: $\mathbb{R}$-factorizable group

MSC(2000): 54H11, 22A05

Resumen
En este artículo encontramos condiciones bajo las cuales el producto directo de grupos abelianos $\mathbb{R}$-factorizables es $\mathbb{R}$-factorizable. Para ello usaremos propiedades del producto interno de subgrupos $\mathbb{R}$-factorizables.

Palabras y frases claves: Grupo topológico $\mathbb{R}$-factorizable

1 Introducción

Un grupo topológico es un grupo G, con estructura de espacio topológico, de forma que la aplicación $(x, y) \to xy^{-1}$, de $G \times G \to G$ es continua. Un grupo topológico G, se dice $\mathbb{R}$-factorizable, cuando para toda función continua $f : G \to \mathbb{R}$, existe un grupo topológico 2-contable K, un homomorfismo continuo sobreyectivo $\pi : G \to K$ y una función continua $g : K \to \mathbb{R}$, talque $f = g\pi$. La clase de los grupos $\mathbb{R}$-factorizables es muy amplia, en [3] M. Tkachenko probó que contiene a los grupos totalmemte acotados, a los grupos de Lindelof, a subgrupos de grupos σ-compactos y a los subgrupos densos del producto directo de grupos segundo contables.En [4] M. Tkachenko resolvió parcialmente, el problema de la monoticidad de la dimensión entre grupos topológicos, para el caso particular en que el menor de los grupos sea $\mathbb{R}$-factorizable. De aquí la importancia de estudiar los grupos $\mathbb{R}$-factorizables. En [4] se estudió el producto directo de grupos $\mathbb{R}$-factorizables y se encotraron condiciones para que la $\mathbb{R}$-factorizabilidad se preserve bajo el producto directo. El objetivo ahora es resolver parcialmente este problema en términos del producto interno.

2 Resultados previos

Teorema 2.1. *Sean X, Y espacios topológicos, con Y Hausdorff. Sea además D denso en X y A un subespacio de X que contiene a D. Si $f, g : A \to Y$ son funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$ entonces $f = g$.*

Demostración. Sean $\overline{D_A}$ y $\overline{D_X}$ las clausuras de D en A y X, respectivamente. Es fácil ver que $\overline{D_A} = \overline{D_X} \cap A = A$. Luego D es denso en A. Supongamos que $f \neq g$, sea $z \in A$ talque $f(z) \neq g(z)$ y U, V abiertos disyuntos que contienen a $f(z)$ y $g(z)$, respectivamente. Ahora $z \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ es un abierto que no corta a D, es decir $z \notin \overline{D_A}$, contradiciendo la densidad de D en A. □

Proposición 2.2. *Sea G un grupo topológico, D denso en G y U abierto en G. Entonces $G = DU$.*

Demostración. Sea $g \in G$, por ser gU^{-1} abierto, existe $x \in D \cap gU^{-1}$, es decir existe $u \in U$ talque $x = gu^{-1} \in D$, luego $g = xu \in DU$. Por ser g cualquiera tenemos que $G = DU$. □

Definición 2.3. *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. A se dice un retracto de X, si toda función continua $f : A \to \mathbb{R}$, admite una extensión continua definida sobre todo X.*

El siguiente resultado es probado en [1].

Proposición 2.4. *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo abierto de G. Entonces H es un retracto de G.*

Lema 2.5. *Sea G un grupo $\mathbb{R}$-factorizable y H un subgrupo abierto de G. Entonces H es $\mathbb{R}$-factorizable.*

Demostración. Sea G $\mathbb{R}$-factorizable y H un subgrupo abierto de G. Sea $f : H \to \mathbb{R}$ una función continua. Por ser H abierto podemos aplicar la Proposición 2.4 y encontrar una extensión continua $\widehat{f} : G \to \mathbb{R}$ de f. Consideremos un grupo segundo contable K, un homomorfismo continuo sobre π, y una función continua g, talque $\widehat{f} = g\pi$, luego $f = g(\pi |_H)$. □

3 Resultados

En esta sección, a menos que se indique lo contrario, e denota el elemento neutro del grupo en cuestión.

Lema 3.1. *Sea G un grupo topológico abeliano y $\{H_i\}_{i=1}^n$, una familia finita de subgrupos de G, tales que al menos uno de ellos es denso en G, y que además para cada $j = 1, 2...n$ se cumple:*

$$H_j \cap (H_1 H_2 ... H_{j-1}) = \{e\}.$$

Entonces $H_1 H_2 ... H_n$ es $\mathbb{R}$ -factorizable.

Demostración. Sin pérdida de generalidad asumamos que H_1 es denso en G. Sea $f : H_1 H_2 ... H_n \to \mathbb{R}$ una función continua y f_i su restricción a H_i, $i = 1, 2, ..., n$.

Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, podemos hallar un espacio 2-contable K_i, un homomorfismo continuo sobreyectivo $\pi_i : H_i \to K_i$ y una función continua $g_i : K_i \to \mathbb{R}$, talque $f_i = g_i\pi_i$. Sea $A = \{i : i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $g_i(e) = 0\}$ y A^c su complemento. Definamos $g : K_1 \times K_2 \times ... \times K_n \to \mathbb{R}$ y $\pi : H_1H_2...H_n \to K_1 \times K_2 \times ... \times K_n$ por las fórmulas

$$g(k_1, k_2, ...k_n) = \frac{1}{\prod_{i\in A^c} g_i(e)} \prod_{i\in A^c} g_i(k_i) + \sum_{i\in A} g_i(k_i)$$

$$\pi(h_1h_2...h_n) = (\pi_1(h_1), \pi_2(h_2)..., \pi_n(h_n)).$$

Se puede ver que g es continua y que π es un homomorfismo continuo y sobreyectivo y además $\prod_{i=1}^n K_i$ es 2-contable. Ahora si $h \in H_1$ tenemos que

$$g\pi(h) = g\pi(he \ldots e) = g(\pi_1(h), \pi_2(e), ..., \pi_n(e)) = g_1\pi_1(h) = f_1(h).$$

Por Teorema 2.1 tenemos que $f = g\pi$. $\square$

Teorema 3.2. *Sean G y G' grupos abelianos, con neutros respectivos, e_1, e_2 y K_1, K_2 subgrupos $\mathbb{R}$-factorizables de G', con K_1 denso en G' y $K_1 \cap K_2 = \{e_2\}$. Si $G \times K_1$ es $\mathbb{R}$-factorizable, entonces $G \times K$ es $\mathbb{R}$-factorizable, donde $K = K_1K_2$. En particular si K_2 es abierto en G', entonces $G \times G'$ es $\mathbb{R}$-factorizable.*

Demostración. Sea $H_1 = G\times K_1$ y $H_2 = \{e_1\}\times K_2$. Note que H_1 es denso en $G\times G'$ y tanto H_1 como H_2 son $\mathbb{R}$-factorizables, además $H_1 \cap H_2 = (e_1, e_2)$. Podemos aplicar el Lema 3.1 y decir que $H_1H_2 = G \times K$ es $\mathbb{R}$-factorizable. Note que si K_2 es abierto en G', podemos aplicar Proposición 2.2 y decir que $K = G'$. $\square$

Observación 3.3. *En [4] se probó que el producto directo de un grupo compacto con un grupo $\mathbb{R}$-factorizable localmente conexo, es $\mathbb{R}$-factorizable. Por tanto si en el teorema anterior suponemos que G es compacto y K_1 es localmente conexo, podemos concluir que $G \times K$ es $\mathbb{R}$-factorizable.*

Teorema 3.4. *Sea G un grupo topológico abeliano con un subgrupo denso K. Sea H un subgrupo abierto de G talque $K \cap H = \{e\}$. Entonces H es $\mathbb{R}$-factorizable si y sólo si lo es G.*

Demostración. Si H es $\mathbb{R}$-factorizable el Lema 3.1 garantiza que KH es $\mathbb{R}$-factorizable y por Proposición 2.2 tenemos que $G = KH$. Para el recíproco aplique el Lema 2.5. $\square$

Referencias

[1] C. Hernández, Subgroups of $\mathbb{R}$-factorizable groups, comment.Math.univ.carolinae 39,2 (1998)371-378.

[2] G. Rubiano,Topología General. Universidad Nacional de Colombia, Departamento de matemáticas y estadísticas, 1997.

[3] M.Tkachenko, $\mathbb{R}$-factorizable groups and subgroups of Lindelöf P-groups,Topology Appl. 136(2004),135-167.

[4] M.Tkachenko, Subgroups, quotient groups and products of $\mathbb{R}$-factorizable groups,Toplogy proc. 16 (1991) 201-231.

Dirección del autor
Julio Cesar Hernández Arzusa — Programa de Matemáticas, Universidad de Cartagena, Cartagena, Colombia
e-mail: `jchernandeza12@gmail.com`